

Line Programming Economic Interpretation of the Problem of Doubts

Djurayev N 1

Mahmadiyev BS 2

Аннотация:

В статье раскрываются математические основы оптимальной оценки производственных планов и запасы ресурсов предприятий по задачи двойственного линейного программирования. Важную роль в этом играет критерий оптимальности и цена двойственности.

Ключевые слова: Программирования, задача двойственности, оптимальность, критерий оптимальности, оценка двойственности.



Chiziqli programmashtirish masalasi va uning ikkilanish masalasidan tashkil topgan ikkilanishlar masalalari juftini qaraymiz.

To`g`ri masala:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (1)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3)$$

funksiyaning maksimumini toping.

Ikkilanish masalasi:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_j \geq c_j \quad (j = \overline{1, n}) \quad (4)$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}) \quad (5)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi

$$F^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (6)$$

funksiyaning minimumga tekshiring.

Har bir (1)-(3) va (4)-(6) masala, umuman olganda chiziqli programmashtirishning mustaqil masalalari hisoblanadi va ularning birini ikkinchisiga bog`liq bo`lmagan holda yechish mumkin. Biroq, simpleks usul bilan ulardan birining optimal rejasi(yechimi)ni aniqlashdan ikkalasining ham yechimi topiladi.

Dastlabki va ikkilanish masalalarining yechimlari orasidagi muhim bog`liqlikni tavsiflovchi quyidagi ikkilanishlar lemmalarini keltiramiz.

Ikkilanishlar masalalari juftini matritsaviy ko`rinishda yozib olamiz.

To`g`ri masala: Ikkilangan masala

$$AX \leq B, YA \geq C,$$

$$X \geq 0, Y \geq 0$$

$$F_{\max} = CX, F_{\min}^* = YB$$

Bu yerda, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ -xarajatlar matritsasi, a_{ij} - $i (i = \overline{1, m})$ birlik mahsulot

ishlab chiqarish uchun $j (j = \overline{1, n})$ birlik resurs xarajati;

$C = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$ -satr matritsa, $c_j - j (j = \overline{1, n})$ mahsulotni sotishdan keladigan foyda,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - har bir mahsulotdan qancha miqdorda ishlab chiqarilganlik rejasi,

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ -xomashyolar bahosiva $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ -ustun matritsa, b_i - xomashyolar

zahirasi.

1-lemma. Agar X -dastlabki (1)-(3) masalaning biror rejasi, Y esa (4)-(6)

ikkilanish masalasining ixtiyoriy rejasi bo'lsa, u holdastlabki masalaning maqsad funksiyasining X rejadagi qiymati ikkilanish masalasining Y rejaga mos qiymatidan katta bo'lmaydi, ya'ni $F(X) \leq F^*(Y)$.

Boshqacha aytganda,

$$CX \leq YB \quad (7)$$

Haqiqatdan, X va Y mumkin bo'lgan reja bo'lsa,

$$AX \leq B \quad \text{va} \quad Y \geq 0 \quad \text{dan} \quad YAX \leq YB .$$

Shunga o'xshash, $YA \geq C$ va $X \geq 0$ dan $YAX \geq CX$ kelib chiqadi.

Shunday qilib,

$$CX \leq YAX \leq YB .$$

Bundan, (7) kelib chiqadi.

(7)tengsizlik ikkilanish masalasining **asosiy tengsizligi** deyiladi.

Lemmaning iqtisodiy ma'nosi ishlab chiqarishning mumkin bo'lgan har qanday rejasi hamda xomashyolarning mumkin bo'lgan har qanday baholari uchun umumiy ishlab chiqilgan mahsulot bahosixomashyo bahosidan oshmasligini ko'rsatadi.

2-lemma. Agar ikkilanish masalasining biror X^* va Y^* mumkin bo'lgan rejasi uchun

$$CX^* = Y^*B \quad (8)$$

shart o`rinli bo`lsa, u holda X^* va Y^* ikkilanishlar masalalari juftining mos optimal rejasi bo`ladi.

Haqiqatdan, X^* va Y^* ikkilanishlar masalalari juftining mos rejasi bo`lsin. Agar (8) shart bajarilsa, burejalar optimal bo`lishini ko`rsatish zarur. To`g`ri masalaning ixtiyoriy X rejasini qaraymiz. 1-lemmaga asosan,

$$CX \leq Y^* B = CX^*.$$

Y^* rejaning optimalligini ham shu kabi ko`rsatish mumkin.

2-lemma (yoki (8) shart) chiziqli programmashtirish ikkilanish masalalari jufti uchun **optimallik kriteriysi** deb yuritiladi.

Agar (8) tenglik o`rinli bo`lsa, u holda mahsulotning mumkin bo`lgan ishlab chiqarish rejasida xomashyolarning mumkin bo`lgan baholari optimal bo`ladi. Bundan ko`rinadiki, ikkilangan baholar qilingan xarajatlar va ishlab chiqarilgan mahsulotlar pul miqdori o`zaro teng bo`lishini ta`minlovchi vosita bo`lib xizmat qiladi.

Optimallik kriteriysining iqtisodiy mazmuni: agar mahsulot ishlab chiqarishni maksimalashtirish optimal rejasini aniqlovchi masala yechimga ega bo`lsa, u holda resurslarni baholovchi masala ham yechimga ega. Shuningdek, optimal rejani amalga oshirish uchun ishlab chiqarilgan mahsulotning bahosi resurslar umumiy bahosi bilan mos tushadi.

Ikkilanishlar masalasi rejalarining optimal bo`lishi maqsad funksiyasiyalarning qiymatlari mos kelishi uchun yetarli. Bu holda baho, xarajat va natijani muvozanatda saqlash vositasi sifatida yuzaga chiqadi.

Ikkilanishlar bahosi shunday xossaga egaki, ular optimal rejani daromadlilikini (rentabelligini) kafolatlaydi, ya`ni ishlab chiqarish va resurslar umumiy bahosining tengligi optimal rejadan boshqar qanday reja foyda keltirmasligini ogohlatiradi.

Ikkilanishlar bahosi xarajatlar va ishlab chiqarish natijalarini taqqoslash va muvozanatni saqlashimkonini beradi.

Ikkilanish masalasi va ikkilanishlar baholarining iqtisodiy talqiniga misol keltiramiz.

Masala. Uch xil A , B va C mahsulot ishlab chiqarish uchun uch turdagi ashyodan foydalaniladi. Har bir tur xomashyodan mos ravishda 180, 210 va 244 kg danko`p bo`lmagansonda ishlatiladi. Bir birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun ashyolar xarajati miqdori va ishlab chiqarilgan har bir birlik mahsulot narxi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Ashyolarturi	Bir birlik mahsulot ashyolar turi bo`yicha xarajat miqdori(kg)			Ashyolarning zahirasi(kg)
	A	B	C	
I	4	3	1	180
II	3	1	3	210
III	1	2	5	244
Bir birlik mahsulot narxi(ming so`m)	10	14	12	

Ishlab chiqarish rejasini shunday tuzish kerakki, mahsulot bahosi maksimal bo`lsin. Mahsulot ishlab chiqarish uchun ishlatilgan xomashyolar xarajatini baholang. Har bir qayd etilgan xomashyo bahosi shunday bo`lisi kerakki, barcha foydalanilgan xomashyolar bahosi minimal bo`lsin.

Yechish. Masalaning matematik modelini tuzamiz. A mahsulot x_1 , B mahsulot x_2 va C mahsulot x_3 birlik miqdorda ishlab chiqarilsin. U nolda, ishlab chiqarishning optimal rejasini topish uchun

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 210 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 244 \end{cases} \quad (9)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \quad (10)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \quad (11)$$

maqсад funksiyaning maksimumini topish masalasini yechish zarur.

Mahsulot ishlab chiqarishga ishlatiladigan xomashyolar ikkilanishlab bahosini mos ravishda y_1, y_2, y_3 bilan belgilaymiz. U holda, ishlab chiqarishda foydalanilgan xomashyolarning umumiy bahosi

$$F^* = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \rightarrow \min$$

ni tashkil etadi.

Ikkilanishlar bahosi sharlaridan, xomashyolarning umumiy bahosi bir birlik miqdorda ishlab chiqarilgan mahsulot narxidan kichik bo'lmashligi kerak, ya'ni y_1, y_2, y_3 lar quyidagi tengsizliklarni qanoatlantirishi lozim.

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 14 \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12 \end{cases} \quad (5)$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0 \quad (6)$$

Ko'rinib turibdiki, (1)-(3) va (4)-(6) masalalar ikkilanishlar jufti simmetrik masalalarini tashkil etadi. To'g'ri masalani yechish A, B va C mahsulot ishlab chiqarish optimal rejasini beradi, (4)-(6) ikkilanish masalasining yechimi esa mahsulot ishlab chiqarishga sarf qilingan xomashyolar sistemasining optimal bahosini beradi.

(1)-(3) masalani yechib, $X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 82 \\ 16 \end{pmatrix}$ optimal rejani, ya'ni $x_1^* = 0, x_2^* = 82, x_3^* = 16$ va

$$F_{\max} = 10 \cdot 0 + 14 \cdot 82 + 12 \cdot 16 = 1340$$

ni topamiz. Bu rejada 80 kg II-tur ashyo ishlatilmadi. Buni (9) ga qo'yib ko'rishimiz ham mumkin:

$$\begin{cases} 4 \cdot 0 + 2 \cdot 82 + 16 = 180 \\ 3 \cdot 0 + 82 + 3 \cdot 16 = 130 < 210 \quad (210 - 130 = 80) \\ 0 + 2 \cdot 82 + 5 \cdot 16 = 244 \end{cases}$$

Ko`rinib turibdiki, X^* yechim (1) sistemaning ikkinchi tenglamasini qanoatlantirmaydi. Demak, $y_2^* = 0$ va ikkilanish masalasining optimal yechimi

$$y_1^* = \frac{23}{4}, \quad y_2^* = 0, \quad y_3^* = \frac{5}{4},$$

$$\text{ya'ni } Y^* = \left(\frac{23}{4}, 0, \frac{5}{4} \right).$$

y_1^* va y_3^* lar mos ravishda I va III-turxomashyolar birligining ikkilanish bahosini beradi. Bu baholar noldan farqli va demak, I va III- ashyolar to`liq ishlatiladi. II –turxomashyoning ikkilanish bahosi nolga teng. Bu xomashyo ishlab chiqarishning optimal rejasida to`liq ishlatilmaydi, ya'ni bu xomashyo keragidan ortiqqligini ko`rsatadi.

Shunday qilib, agarmahsulot ishlab chiqarishdaxomashyo to`liq ishlatilsa, ikkilanish baho xomashyo kamyob (defitset)ligini aniqlaydi.

Ikkilanish masalasi maqsad funksiyasining minimum qiymatini hisoblaymiz:

$$F^*_{\min} = 180 \cdot \frac{23}{4} + 210 \cdot 0 + 244 \cdot \frac{5}{4} = 1340$$

Ko`rinib turibdiki, $F^*_{\min} = 1340$ dastlabki(to`g`ri) masala maqsad funksiyasining maksimum qiymati bilan mos keladi. Shunday qilib, haqiqatdan ham ikkilanishlar bahosito`g`ri masalaning optimal rejasi bilan chambarchas bog`liq.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. И.Л.Акулич“Математическое программирование в примерах и задачах” М.,1986
2. Э.В. Киселева, С. И. Сувольева. “Математическое программирование”, Новосибирск, 2002